1. Сколько среди чисел 2020^2, 2019^3, …, 2^{2020} таких, которые делятся на 5?

Решение

На 5 будут делиться только те из степеней, в основании которых находится число, кратное 5, поэтому количество таких чисел равно их количеству среди оснований степеней из условия — 2020, 2019, …, 2, где каждое 5-е число, начиная с первого, делится на 5.

Ответ: 404 числа.

2. Кот Матроскин и Шарик отправились откапывать клад. Пройдя половину пути, они встретили Дядю Федора, и Шарик остановился поговорить с ним, а Матроскин пошел дальше. Поговорив 10 минут, Шарик догнал Матроскина, и оставшуюся треть пути они прошли вместе. Сколько времени занял путь до клада, если Матроскин ходит с постоянной скоростью, а скорость бегущего Шарика в три раза больше скорости Матроскина?

Решение

Пусть t мин — время, которое понадобилось Шарику, чтобы догнать Матроскина; v — скорость Матроскина. Тогда $(10 + t) \cdot v = t \cdot 3v$, откуда $t = 5$. За время $t + 10$ Матроскин прошел одну шестую пути, откуда общее время пути — 90 мин.

Ответ: 90 мин.

3. Решите в натуральных числах уравнение $2xy - 2y - x - 1 = 0$.

Решение

$2xy - 2y - x - 1 = 2y(x - 1) - x - 1 = 2y(x - 1) - (x - 1) - 2 = (2y - 1)(x - 1) - 2 = 0$.
$(2y - 1)(x - 1) = 2$. Так как $2y - 1$ и $x - 1$ — целые неотрицательные числа, они равны 1 и 2, причем $2y - 1$ нечетно, значит, $2y - 1 = 1$ и $x - 1 = 2$, откуда $x = 3$, $y = 1$.

Ответ: $x = 3$, $y = 1$.

4. В треугольник ABC вписан квадрат $KLMN$, сторона KN которого лежит на стороне AC, а две вершины L и M — на сторонах AB и BC соответственно. Из вершины B проведена высота $BH = 3$. Чему равна сторона квадрата, если $AC = 7$?

Решение

Пусть P — точка пересечения высоты BH со стороной LM. Тогда $BH = BP + PH = BP + LM$. Треугольники ABC и LBM подобны по двум углам, откуда $BH \cdot LM = AC \cdot BP = AC \cdot (BH - LM)$, откуда $LM = AC \cdot BH / (BH + AC) = 2{,}1$.

Ответ: 2,1.

5. В мешке Деда Мороза лежат 5 шоколадных, 5 клубничных и 5 сливочных конфет. Какое наименьшее количество конфет нужно достать Васе, чтобы гарантированно попробовать все вкусы?

Решение

Заметим, что 10 конфет может не хватить, так как Вася может вытащить по 5 конфет двух вкусов и не попробовать третий.

Так как Вася может достать не более 5 конфет каждого вкуса, то конфет двух вкусов он может достать не более 10, значит, доставая 11 и более конфет, он обязательно найдет все виды конфет.

Ответ: 11.

6. Произведение цифр числа $\overline{ABC}$ равно $\overline{BC}$, а произведение цифр числа $\overline{BC}$ равно $\overline{C}$. Чему может быть равно число $\overline{ABC}$?

Решение

Так как $B \cdot C = C$, то $B = 1$ или $C = 0$. Второй вариант невозможен, так как $A \cdot B \cdot C = BC$, значит, $B = 1$. $A \cdot C = 10 + C$, откуда $C \cdot (A - 1) = 10$, тогда $C = 2$ и $A = 6$ или $C = 5$ и $A = 3$.

Ответ: 612, 315.

7. В шкатулке лежат несколько монет различного веса. Известно, что если достать любые две из них, то их общий вес совпадет с общим весом одной или нескольких монет, оставшихся в шкатулке. Какое наименьшее количество монет могло быть в шкатулке?

Решение

Если достать из шкатулки две самых тяжелых монеты, то потребуется не менее трех монет, оставшихся в шкатулке, чтобы уравновесить их, значит, монет в шкатулке не менее 5. Предположим, монет ровно 5, упорядочим их по возрастанию веса $C_1 < C_2 < C_3 < C_4 < C_5$. Заметим, что $C_4 + C_5 = C_1 + C_2 + C_3$ и $C_3 + C_5 = C_1 + C_2 + C_4$, откуда $C_4 - C_3 = C_3 - C_4$ и $C_3 = C_4$, что противоречит условию. Набор из шести монет веса 3, 4, 5, 6, 7, 8 подходит.

пара	3, 4	3, 5	3, 6	3, 7	3, 8	4, 5	4, 6	4, 7	4, 8	5, 6	5, 7	5, 8	6, 7	6, 8	7, 8
	7	8	4, 5	4, 6	4, 7	3, 6	3, 7	3, 8	5, 7	3, 8	4, 8	6, 7	5, 8	3, 4, 7	4, 5, 6
вес	7	8	9	10	11	9	10	11	12	11	12	13	13	14	15

Ответ: 6.

8. На олимпиаду собирают команду из 4-х разных школ. Из каждой школы выбирают по одному ученику, причем в команде должно быть не менее двух девочек. Сколько различных команд можно составить, если в каждой школе могут пойти на олимпиаду 5 девочек и 3 мальчика?

Решение

С двумя мальчиками можно составить $6 \cdot 5^2 \cdot 3^2$ различных команд, с одним мальчиком — $4 \cdot 5^3 \cdot 3$ команд, без мальчиков — 5^4 команд, значит, всего 3475 команд.

Ответ: 3475 команд.